Álgebra Lineal

Espacios vectoriales. Bases

61) Dados los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linealmente independientes, probar que también lo son los vectores

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_1 + v_2$$

$$\ldots$$

$$u_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$$

62) En el espacio vectorial V sobre el cuerpo de los números reales se consideran los conjuntos: V_1 formado por todas las combinaciones lineales de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; V_2 formado por todas las combinaciones lineales de $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$; V_3 formado por todas las combinaciones lineales de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_n, y, z$ son vectores de V . Sabiendo que $z \notin V_1$ y $z \in V_2$, probar que $y \in V_3$.

63) Sean u, v, w tres vectores linealmente independientes. Mostrar que $u + v, u - v, u - 2v + w$ son linealmente independientes.

64) Sean u_1, u_2, u_3 y u_4 cuatro vectores distintos de $\mathbf{K^n}$ tales que los conjuntos

$$\{u_1, u_2, u_3\}; \{u_1, u_2, u_4\}; \{u_1, u_3, u_4\}; \{u_2, u_3, u_4\}$$

son linealmente independientes. Razonar si se puede asegurar que $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es linealmente independiente también.

65) Los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ y x vienen dados por sus coordenadas en cierta base. Comprobar en cada caso que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base y hallar las coordenadas del vector x en dicha base:

1. $$e_1 = (2, 1, -3), e_2 = (3, 2, -5), e_3 = (1, -1, 1); x = (6, 2, 7)$$

2.

$$e_1 = (1,2,-1,-2), e_2 = (2,3,0,-1), e_3 = (1,3,-1,0), e_4 = (0,0,0,1); x = (7,14,-1,2)$$

Dar también las matrices del cambio de base.

66) Contestar verdadero o falso a las siguientes cuestiones:

1. Todo espacio vectorial de dimensión finita tiene un número finito de bases

2. Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ son vectores linealmente independientes en un espacio vectorial de dimensión n entonces constituyen una base.

3. Si $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes de V, entonces el conjunto $\{v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3, v_1+2v_2+7v_3+25v_4\}$ es también linealmente independiente.

67) Sea $P_2(x)$ el espacio vectorial de los polinomios en una indeterminada x con coeficientes en un cuerpo $\mathbf{K}$ y grado menor o igual que 2. Si a, b, c son tres escalares cualesquiera de $\mathbf{K}$, indicar razonadamente si los polinomios

$$1 + ax + a^2x^2, 1 + bx + b^2x^2, 1 + cx + c^2x^2$$

son linealmente independientes según los valores de a, b, c.

Generalizar el resultado obtenido para $n+1$ polinomios del mismo tipo y de grado n.

68) En el espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$ de las funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$, estudiar si las funciones $senx, cosx, 3 + senx, 2 + cosx$ son linealmente independientes.

Lo mismo para las funciones $cosx, sen(x + \pi/4), sen^2x$

(Indicación: evaluar las funciones en valores de x adecuados)

69) En el conjunto $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se define la operación interna

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

y la operación externa de $\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ en $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

$$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$$

Estudiar si $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ con estas operaciones tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$.

70) Estudiar si los siguientes conjuntos son o no espacios vectoriales sobre el cuerpo de los números reales:

1. El conjunto de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ con la suma y el producto por escalares usuales.

2. El conjunto de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ con la suma y el producto por escalares usuales.

71) a) Probar que un subespacio vectorial U de un $\mathbf{K}$-espacio vectorial V es también un $\mathbf{K}$- espacio vectorial con las mismas operaciones definidas en V y restringidas a U.

b) Probar que el vector 0 de un espacio vectorial V sobre $\mathbf{K}$ es un subespacio vectorial de V. La misma cuestión para el mismo espacio V visto como subconjunto no vacío de V. (Son los dos **subespacios impropios de un espacio vectorial** V)

72) Probar que los siguientes subconjuntos del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n sobre $\mathbf{K}$ son subespacios vectoriales:

a) Las matrices triangulares superiores (resp. triangulares inferiores)

b) Las matrices diagonales

c) Las matrices simétricas

d) Las matrices antisimétricas

73) Probar que el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales, de n incógnitas y coeficientes en un cuerpo $\mathbf{K}$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{K^n}$.

74) Sea $V = \mathbf{R^3}$. Estudiar si son o no subespacios vectoriales los conjuntos siguientes:

1. $\{(a,a,a)/a \in \mathbf{R}\}$
2. $\{(a,b,0)/a,b \in \mathbf{R}\}$
3. $\{(a,b,c)/a+b+c=0, a,b,c \in \mathbf{R}\}$
4. $\{(a,b,c)/a^2+b^2+c^2=1, a,b,c \in \mathbf{R}\}$

75) Indicar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios del espacio vectorial de todas las funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$:

1. Las funciones tales que $f(0) = 0$
2. Las funciones tales que $f(0)$ es un entero
3. Las funciones polinómicas de grado n
4. Las funciones polinómicas de grado menor o igual que n

76) Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la unión de dos subespacios vectoriales sea un subespacio vectorial es que uno de ellos esté contenido en el otro.

77) Extender el conjunto $S = \{(1,1,-1,1),(1,1,0,1),(1,2,1,1)\}$ para formar una base $\mathbf{R^4}$

78) En $\mathbf{R^4}$ se considera $E = L((4,-2,1,7),(1,0,2,4))$. Dado el vector $(-1,2,5,x)$, calcular el valor de x para que este vector pertenezca a E.

79) Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 sobre $\mathbf{R}$ y sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de V. Se pide:

Calcular una base de V que contenga al vector $x = e_1 - e_2 + e_3$

Dados los vectores $y_1 = e_1 - e_2$ e $y_2 = e_2 + e_3$, hallar un tercer vector y_3 de manera que $\{y_1, y_2, y_3\}$ formen una base de V y x tenga coordenadas $(1,1,1)$ en esta base.

80) Consideremos el espacio vectorial de los polinomios en una indeterminada con coeficientes reales y grado menor o igual que 3 y en él la base $\{1, x, x^2, x^3\}$

1. Escribir las ecuaciones del cambio de base (en alguno de los dos sentidos) entre la anterior y la formada por los polinomios $\{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$

2. Calcular la dimensión y dar una base del subespacio generado por $p(x) = x^2 - 2x$ y sus sucesivas derivadas.

81) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Probar que el conjunto de matrices que conmutan con A es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 y elementos en $\mathbf{R}$.

2. Calcular la dimensión y una base de dicho subespacio vectorial.

82) Calcular la dimensión del siguiente subespacio de $\mathbf{R^4}$ en función de los parámetros que aparecen:

$$U = L((1, a, 0, -a), (0, 1, 1, a), (-1, 0, a, 0), (2, a + 1, -a + 1, 0))$$

83) Determinar los valores de los parámetros λ y μ para que las matrices de elementos reales cuadradas de orden 2

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1. generen un subespacio de dimensión 3
2. sean linealmente independientes
3. generen un subespacio de dimensión 1
4. Sean base del espacio de matrices cuadradas de orden 2 y elementos reales

84) Sea el espacio vectorial sobre $\mathbf{K}$, $\mathbf{K^2}$, cuando $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/(\mathbf{2})$ y la suma y el producto son los habituales en $\mathbf{K^n}$. Determinar todas sus bases y todos sus subespacios vectoriales. Lo mismo para $\mathbf{K^3}$